Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2018/2019**
M1 Théorie de Galois **Maria Chlouveraki**

Corps algébriquement clos et polynômes séparables - TD 5

1. Montrer que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas algébriquement clos de deux façons différentes.

2. Si F est un corps fini, alors F n'est pas algébriquement clos.

3. Si F est un corps, t est un élément transcendant sur F et $f_1(t) = f_2(t)$ pour certains $f_1(x), f_2(x) \in F[x]$, alors $f_1(x) = f_2(x)$. Montrer que cela n'est pas vrai pour des éléments algébriques.

4. Si F est un corps et t est un élément transcendant sur F, alors $F(t)$ n'est pas algébriquement clos.

5. Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Le corps de décomposition du polynôme $x^{p^n} - x \in \mathbb{F}_p[x]$ est un corps fini à p^n éléments. On le dénote par $\mathbb{F}_{p^n}$. Si F est un autre corps fini avec $|F| = p^n$, alors $F \cong \mathbb{F}_{p^n}$.

6. Montrer que le polynôme $f(x) = x^2 - t \in \mathbb{F}_2(t)[x]$ est irréductible, mais pas séparable.

7. Montrer que le polynôme $f(x) = x^3 - t^2 - t - 1 \in \mathbb{F}_3(t)[x]$ est irréductible, mais pas séparable.